УДК 699.86

В.С. БЕЛЯЕВ, канд. техн. наук, ОАО «Центральный научно-исследовательский и проектный институт жилых и общественных зданий (ЦНИИЭП жилища)» (Москва)

Теория угасания температурных колебаний при прохождении их через наружные стеновые панели*

Приведены теоретические положения передачи температурных колебаний через наружные стеновые панели. Решена задача о передаче температурных волн сквозь наружные ограждающие конструкции с точки зрения вероятностных процессов. Выведены формулы для определения скорости распространения температурных волн, критического значения расхода воздуха в вентилируемой воздушной прослойке наружных стеновых панелей и др.

Ключевые слова: *коэффициент теплообмена, затухающие колебания, параметр Лыкова, воздушная прослойка, расход воздуха, скорость распространения температурной волны.*

Передача температурных волн через многослойные конструкции играет важную роль в теории теплоустойчивости. Дискуссия об интерпретации основных показателей в этой задаче имеет долгую историю. Данная работа является дополнением к исследованиям по указанной проблеме и продолжением материала статьи, опубликованной в журнале «Жилищное строительство» [1]. При этом далее будут даны теоретические положения температурных колебаний в стенах с вентилируемой воздушной прослойкой.

Для удобства пользования материалом нумерация формул дана как продолжение нумерации формул предыдущей статьи [1].

Рассмотрим однородную стеновую панель толщиной l (плотность γ, удельная теплоемкость c, коэффициент теплопроводности λ). Пусть α_0 – коэффициент теплообмена между панелью и наружным воздухом; α_1 – коэффициент теплообмена между панелью и внутренним воздухом. Тогда температурное поле $T(t, x)$ внутри панели без внутренних источников тепла описывается следующими уравнениями:

$$c\gamma\,\frac{\partial T}{\partial t}=\lambda\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}; \qquad (10)$$

$$-\lambda\frac{\partial T}{\partial t}\bigg|_{x=0}=\alpha_o[T_o-T(t,0)]; \qquad (11)$$

$$-\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=l}=\alpha_1[T(t,1)-T_1], \qquad (12)$$

где T_o – температура наружного воздуха; T_1 – температура внутреннего воздуха.

В дальнейшем для упрощения вычислений все величины записываются в комплексных переменных.

Пусть температура наружного воздуха изменяется по гармоническому закону:

$$T_o=A+Be^{i\omega t}, \qquad (13)$$

где A – усредненная температура снаружи; B – амплитуда колебаний; ω – частота колебаний.

Найдем, как будет изменяться температура T_1 внутри помещения.

Сначала перейдем к безразмерным переменным:

$$t\to\tau/\omega,\ T\to Bu+A,\ x\to lz, \qquad (14)$$

тогда получим:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\,\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}; \qquad (10')$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=0}=\beta_o[u(0)-e^{i\tau}]; \qquad (11')$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=1}=\beta_1[u_1-u(1)], \qquad (12')$$

где $\beta_j=\alpha_j\,l/\lambda,\ j=0,1,\ k=\lambda/(cj\omega l^2)$

$$u=D\cdot\exp(\psi\tau+\mu z), \qquad (15)$$

где ψ – константа; μ – см. ниже.

Из (11′) подставим в (15):

$$\psi=l;\ D=\beta_o/(\beta_o+\mu); \qquad (16)$$

$$u_1=\frac{\beta_1-\mu}{\beta_1}\cdot\frac{\beta_o}{\beta_o+\mu}\cdot\exp(i\tau-\mu). \qquad (17)$$

Итак, воздух внутри помещения совершает гармонические колебания с той же частотой ω.

Уменьшение амплитуды колебаний внутри помещения по сравнению с амплитудой колебаний снаружи следующее:

$$V=\left|\frac{u_1}{u_o}\right|=\left|\frac{\beta_o}{\beta_1}\right|\cdot\left|\frac{\beta_1-\mu}{\beta_o+\mu}\right|\cdot\left|\exp(-\mu)\right|. \qquad (18)$$

Введем параметр Лыкова (А.В. Лыков. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.

$$\xi=\sqrt{\frac{\lambda}{c\gamma\omega}}, \qquad (19)$$

тогда

$$\mu^2=\frac{i\,l^2}{\xi^2}\ \text{и}\ \mu=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\cdot\frac{l}{\xi}; \qquad (20)$$

* Продолжение статьи, опубликованной в журнале «Жилищное строительство» № 8–2013.

$$\mu/\beta_m = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{c\gamma\omega\lambda}}{\alpha_m} = \frac{1+i}{\sqrt{2}B_m^*},\ m=0,1, \tag{21}$$

где $B_m^* = \alpha_m/\sqrt{c\gamma\omega\lambda}$;

$$\left|\frac{u_m}{u(m)}-1\right| = \left|\frac{\mu}{\beta_m}\right| = \left|\frac{\sqrt{c\gamma\omega\lambda}}{\alpha_m}\right| \text{или} \frac{|\Delta u|}{|u(m)|} = 1/B_m^*,\ m=0,1, \tag{22}$$

т. е. B_m^* характеризует изменение колебаний окружающего воздуха относительно поверхности панели.

При $\alpha_m \to \infty$ вместо (11) и (12) получим граничные условия 1-го рода, т. е. значения температуры на граничных поверхностях панели. В этом случае амплитуда колебаний уменьшается:

$$V = \left|\frac{1-\mu/\beta_1}{1+\mu/\beta_o}\right| \cdot |\exp(-\mu)| \to |\exp(-\mu)| =$$

$$= \exp[-\mathrm{Re}(-\mu)] = \exp\left|-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{l}{\xi}\right|. \tag{23}$$

Так как при этом отсутствует влияние теплообмена панели и окружающего воздуха, падение амплитуды определяется только внутренними свойствами самой конструкции, которые и отражаются параметром Лыкова ξ.

В то же время параметры B_m^* определяют падение амплитуды колебаний за счет теплообмена панели с окружающим воздухом в пограничном слое.

Для многослойной конструкции с n слоями параметры λ_i, γ_i, c_i постоянны внутри слоя. Поэтому внутри ее температурные колебания описываются уравнениями, аналогичными (12′′):

$$\frac{\partial u_i}{\partial \tau} = k_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2}, \tag{12′′}$$

где $k_i = c_i / (\gamma_i \lambda_i \omega l_i^2)$; $i = 1 \ldots n$.

Условия непрерывности теплового потока на границах слоев имеют следующий вид:

$$\left.\frac{\partial u_i}{\partial z}\right|_{z=0} = \beta_o[u(0) - e^{i\tau}]; \tag{11′′}$$

$$\left.\frac{\partial u_n}{\partial z}\right|_{z=1} = \beta_1[u_в - u_n(1)]; \tag{12′′}$$

$$d_i \left.\frac{\partial u_i}{\partial z}\right|_{z=1} = \left.\frac{\partial u_{i+1}}{\partial z}\right|_{z=0}, \tag{13′′}$$

где $\beta_o = \alpha_o l_1/\lambda_1$; $\beta_n = \alpha_1 l_n/\lambda_n$; $\alpha_i = \lambda_i/\lambda_{i+1}$; $i = 1 \ldots n-1$.

Решая систему (12′′)–(13′′), находим:

$$u_i(z) = \frac{\sqrt{c_1\gamma_1\lambda_1}}{\sqrt{c_i\gamma_i\lambda_i}} \cdot \frac{\beta_o}{\beta_o+\mu_1} \cdot \exp\left(-\sum_1^{n-1}\mu_i l_i\right) \exp(l\tau - \mu_i z);$$

$$\theta = |u_в| = \left|\frac{1/\sqrt{c_n\gamma_n\lambda_n} - \sqrt{l\omega/\alpha_1}}{1/\sqrt{c_i\gamma_i\lambda_i} - \sqrt{l\omega/\alpha_o}}\right| \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_1^n \frac{l_i}{\xi_i}\right), \tag{24}$$

где $\mu^2 = \frac{il^2}{\xi^2}$ – см. выше ф-лу (20); l_i – толщина отдельного слоя; ξ_i – параметр Лыкова каждого слоя.

Пример. Рассмотрим стеновую панель плотностью γ_1 = 1200 кг/м³, толщиной Δl_1 = 0,3 м, удельной теплоемкостью c_1 = 0,84 кДж/кг·°С с коэффициентом теплопроводности λ_1 = 0,44 Вт/(м·К), с облицовочным экраном ($\gamma_э$ = 2400 кг/м³, $\Delta l_э$ = 0,06 м; $c_э$ = 0,84 кДж/(кг·°С); $\lambda_э$ = 1,74 Вт/(м·°С)) и воздушной прослойкой (γ_2 = 1,32 кг/м³; Δl_2 = 0,05 м; c_2 = 20,8 кДж/(кг·°С); λ_2 = 0,02 Вт/(м·°С)).

Для этой панели падение амплитуды суточных колебаний температуры:

$$\theta = \exp(\sqrt{\omega/2} \cdot \sum_{i=1}^{a} \frac{\Delta l_i}{\sqrt{c_i\gamma_i}} = \exp[0{,}006 \cdot (454{,}1+9{,}9+64{,}6)] = 24.$$

Итак, панель ослабляет суточные колебания температуры в 24 раза.

Прохождение случайных температурных волн сквозь строительные конструкции

В этой части задача о передаче температурных волн сквозь ограждающие конструкции рассматривается с точки зрения стохастических (вероятностных) процессов.

Рассмотрим тонкую однородную стеновую панель толщиной l, плотностью ρ, удельной теплоемкостью c с коэффициентом теплопроводности панели λ. Пусть температурное поле на наружной поверхности панели имеет периодический характер с набором различных частот и каждая частота имеет вероятностную амплитуду. Тогда это температурное поле может быть описано случайным процессом ξ (t), а температурное поле внутри панели u (t) – решением следующих уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \tag{25}$$

$$u\big|_{t=0} = \xi(t); \tag{26}$$

$$u\big|_{x=0} = 0, \tag{27}$$

где $a^2 = \lambda/c\rho$ – коэффициент температуропроводности материала панели.

Из работы В.С. Владимирова «Уравнения математической физики» (М., 1980) известно, что решение (25)–(27) можно записать в следующем виде:

$$u(x,t) = \int_o^t W(t-\tau)\xi(\tau)\,dt, \tag{28}$$

где $W(t) = x \cdot \exp(-x^z/4a^z t)/(2a\sqrt{\pi} \cdot t^{3/2})$ при $t \geq 0$. (29)

Итак, температурное поле внутри панели $u(x, t)$ – случайный процесс с весовой функцией $W(t)$.

Рассматривая установившиеся температурные колебания внутри панели, можно считать, что $t \to \infty$. В этом случае, положив $W(t) = 0$ при $t < 0$, по (Ю.А. Розанов. Случайные процессы. М.: Наука, 1979. 185 с.), $u(x, t)$ можно представить в виде:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(t-\tau)\xi(\tau)\,d\tau. \tag{30}$$

Стационарный случайный процесс (30) допускает спектральное разложение по элементарным гармоникам:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(l\omega t)\,\phi_o(\omega)\,\alpha(\omega)\,d\omega, \tag{31}$$

где $\alpha(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-l\omega t)\,\xi(\tau)\,d\tau$ – спектральная характеристика «входного сигнала» («амплитуда» частоты ω); $\phi_o(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-l\omega t)\,w(\tau)\,d\tau$ – спектральная характеристика материала панели.

Входной стационарный случайный процесс:

$$\xi_\Delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2} \exp(i\omega t)\,\alpha(\omega)\,d\omega.$$

При малом интервале $\Delta = (\omega_1, \omega_2)$ приближенно представляет собой гармоническое колебание частоты ω, $\omega_1 \leqslant \omega \leqslant \omega_2$, а его средняя энергия:

$$\mathrm{M}\left|\xi_\Delta(t)\right|^2 = \int_{\omega_1}^{\omega_2}\left|\alpha(\omega)\right|^2 d\omega.$$

Суммарная же энергия стационарного процесса:

$$\mathrm{M}\left|\xi(t)\right|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\left|\alpha(\omega)\right|^2 d\omega.$$

Таким образом, спектральная плотность $g(\omega)=|\alpha(\omega)|^2$ характеризует распределение энергии процесса $\xi(t)$ по составляющим вида $\xi\Delta(t)$ в зависимости от частотного интервала $\Delta = (\omega_1, \omega_2)$.

Аналогичное рассмотрение можно провести для выходного процесса $u(x, t)$. Для него спектральная плотность:

$$f_u(\omega) = |\phi_o(\omega)\cdot\alpha(\omega)|^2 = |\phi_o(\omega)|^2\cdot g(\omega). \qquad (32)$$

Отсюда спектральная плотность материала панели:

$$\phi_o(\omega) = |\phi_o(\omega)|^2 \qquad (33)$$

играет роль «коэффициента усиления» средней энергии «входного сигнала».

Непосредственное вычисление по (Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Наука, 1974. 544 с.):

$$\phi_o(\omega) = \exp\left|-\sqrt{\omega/2}\cdot(1+i)\,x/a\right|; \qquad (34)$$

$$f_o(\omega) = \exp(-\sqrt{2\,\omega}\cdot x/2). \qquad (35)$$

Спектральная характеристика материала панели определяет изменение элементарной гармоники частоты входного процесса под воздействием материала панели. При этом:

$$|\phi_o(\omega)| = \exp(-\sqrt{\omega/2}\cdot x/2) \qquad (36)$$

определяет изменение «амплитуды» частоты ω входного процесса.

Другими словами, параметр Лыкова:

$$\xi = \sqrt{\lambda/(c\rho\omega)} \qquad (37)$$

характеризует влияние материалов панели на «амплитуду» случайных температурных колебаний.

Температурные колебания в стеновых панелях с вентилируемой воздушной прослойкой

Пусть вентилируемая прослойка имеет вид прямоугольной щели шириной d м, длиной l м, массовый расход воздуха через нее – W кг/ч через 1 м глубины щели. Отделена щель от помещения внутренней частью конструкции плотностью ρ_1, теплоемкостью c_1, теплопроводностью λ_1. Наружная часть конструкции имеет плотность $\rho_о$, теплоемкость воздуха $c_в$, теплопроводность $\lambda_в$, плотность $\rho_в$.

Считаем, что наружный воздух совершает температурные колебания с круговой частотой ω. Тогда колебания воздуха у наружной стороны щели имеют ту же частоту ω, а коэффициент затухания амплитуды составляет:

$$V = \sqrt{(1-\sqrt{2}/\mathrm{B}_{ов})/(1+\sqrt{2}/\mathrm{B}о + 1/\mathrm{B}_о^2)}\exp\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{d_о}{\xi_о}\right), \qquad (38)$$

где $\mathrm{B}_m = \alpha_m/\sqrt{c_о\gamma_о\lambda_о\omega}$; $m = 0{,}0\,\mathrm{B}$; $d_о$ – толщина наружной части конструкции; $\xi_о = \sqrt{\lambda_о/c_о\gamma_о\omega}$.

В среде с параметрами c, ρ, λ, d температурные колебания имеют вид:

$$u(z) = \exp(-\mu z + i\tau),$$

где $\mu = (1+i)/\sqrt{2}\,k$; $k = \sqrt{\lambda/c\rho\omega d^2}$; $z = x/d$; $\tau = \omega t$.

Отсюда:

$$u(x) = \exp\left(-x\sqrt{\frac{c\rho\omega}{2\lambda}}\right)\cdot\exp(iS(t, x)), \qquad (39)$$

где фазовая функция $S(t, x) = \omega t - x\sqrt{\dfrac{c\rho\omega}{2\lambda}}$.

Скорость распространения волны есть скорость распространения ее точек с постоянной фазой. Поэтому из фазовой функции $S(t, x)$ получаем скорость распространения температурной волны:

$$V_т = \omega/\sqrt{\frac{c\rho\omega}{2\lambda}} = \frac{2\omega\lambda}{c\rho}. \qquad (40)$$

Пусть средняя скорость воздуха в вентилируемой прослойке $V_в = W\cdot d/\rho_в$. Потоком воздуха температурные колебания сносятся и доходят до противоположной стенки только на участке длиной $l - V_в\cdot d/V_т$. При $l - V_в\cdot d/V_т < 0$, т. е. при $V_в > V_т\cdot l/d$, колебания сносятся потоком полностью и температурные колебания внутренней части конструкции, а тем более помещения отсутствуют. Для расхода W критическое значение:

$$W_{кр} = l\sqrt{\frac{2\omega\lambda\rho}{c}}, \qquad (41)$$

т. е. при расходе воздуха, большем $W_{кр}$, температурные колебания полностью сносятся потоком воздуха вентилируемой воздушной прослойки.

Пример. Для панели длиной 3 м при различных значениях расхода воздуха (в кг/ч) при суточных колебаниях получены следующие данные:

W	4	10	20	30	40
$W_{кр}$	3,86	3,89	3,93	3,98	4,03

Выводы

1. Параметр Лыкова (19) характеризует внутренние свойства материала конструкции по дисперсии температурных колебаний, как регулярных, так и случайных.
2. Параметр B_m^* характеризует дисперсию температурных колебаний внутри пограничного слоя воздуха.
3. Амплитуду колебаний при прохождении многослойной конструкции можно вычислять по формуле (24).
4. Скорость распространения температурной волны можно определять по формуле (40).
5. Критическое значение расхода воздуха в вентилируемой воздушной прослойке определяется формулой (41).
6. Рассматриваемая система вентилируемого ограждения может существенно уменьшить суточные колебания температуры, что улучшит комфорт помещений.

Литература

1. *Беляев В.С.* Наружные ограждающие конструкции с рекуперацией трансмиссионного тепла // Жилищное строительство. 2013. № 8. С. 10–21.