УДК 69.04

В.В. ЛАЛИН, д-р техн. наук, Санкт-Петербургский государственный политехнический университет; А.В. ЯВАРОВ, инженер (yavarov_av@mail.ru), Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, ООО «ИСП Геореконструкция» (Санкт-Петербург)

Построение и тестирование конечного элемента геометрически нелинейного стержня Бернулли-Эйлера

В настоящей работе построен конечный элемент геометрически нелинейного стержня, не имеющего ограничений на величины перемещений, поворотов и деформаций. Реализован метод решения задач продольно-поперечного изгиба и анализа закритического поведения стержней. Применение данного метода позволило получить хорошее совпадение численного и аналитического решений в тестовых задачах.

Ключевые слова: *стержень Бернулли-Эйлера, конечный элемент геометрически нелинейного стержня, касательная матрица жесткости, системы нелинейных уравнений, тензор Жилина, продольно-поперечный изгиб стержней.*

В задачах расчета конструкций на прогрессирующее обрушение [1], действие продольно-поперечного изгиба, анализа закритического поведения требуется учитывать геометрическую нелинейность. В настоящей работе рассматриваются стержневые системы.

Исследованию геометрически нелинейных стержней в контексте использования метода конечных элементов посвящены работы Ю.М. Ветюкова, В.В. Елисеева [2], А.С. Городецкого, И.Д. Евзерова [3], А.В. Перельмутера, В.И. Сливкера [4], П.Ю. Семенова [5], P. Wriggers [6] и др. исследования. В большинстве работ рассматривается стержень Тимошенко с учетом деформаций поперечного сдвига.

Целью настоящей работы является построение и тестирование конечного элемента геометрически нелинейного стержня Бернулли-Эйлера. При этом авторы не рассматривают вопросы, связанные с заданием внешних сосредоточенных моментов [4].

Задачами исследования являются:

– построение касательной матрицы жесткости конечного элемента стержня, для которого не будут установлены ограничения на величины перемещений, поворотов и деформаций;
– реализация метода решения нелинейных задач;
– решение тестовых задач.

В настоящей работе стержень рассматривается как материальная линия [7, 9]. Стержень упругий и относится к типу стержней Бернулли-Эйлера. В статье используются стандартные обозначения прямого тензорного исчисления [8].

Основные уравнения нелинейной механики стержней. В отсчетном положении локальная ось x стержня совпадает с глобальной осью X (рис. 1, *а*). Текущая (актуальная) деформированная конфигурация стержня изображена на рис. 1, *б*, где показан репер Френе ($\underline{t}$, $\underline{n}$, $\underline{b}$), связанный с осью стержня.

Ось стержня определяется зависимостью радиус-вектора от начальной координаты:

$$\underline{r} = \underline{r}(s), \tag{1}$$

где $s \equiv x$ – дуговая координата в отсчетном положении.

Повороты сечения стержня, связанные с изгибом и кручением, описываются ортогональным тензором поворота $\underline{\underline{P}}(s)$, который выражается через вектор поворота $\underline{\varphi}(s)$ [8].

Основными неизвестными при решении задачи в перемещениях являются компоненты вектора $\underline{r}(s)$ и компоненты вектора поворота $\underline{\varphi}(s)$.

Далее штрихи у искомых функций обозначают производные по начальным координатам:

$$(...)' = \frac{d}{ds}(...). \tag{2}$$

Радиус-вектор в отсчетной конфигурации:

$$\underline{r}_0(s) = \underline{i}s. \tag{3}$$

Компоненты производной радиуса-вектора отсчетного положения r_0':

$$r_0' = t_0 = (x_0' \, y_0' \, z_0')^{\mathrm{T}} = (1\ 0\ 0)^{\mathrm{T}}. \tag{4}$$

Компоненты производной радиуса-вектора текущей конфигурации r':

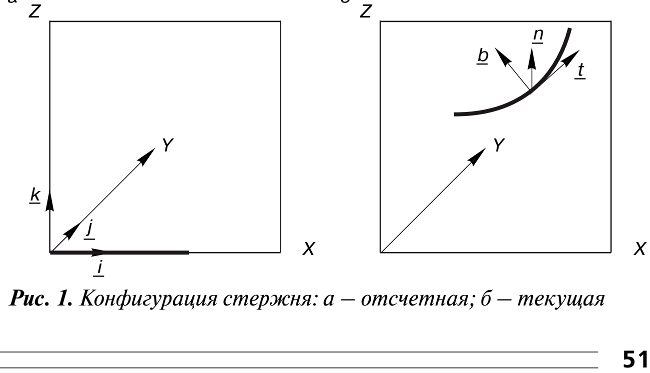

Рис. 1. *Конфигурация стержня: а – отсчетная; б – текущая*

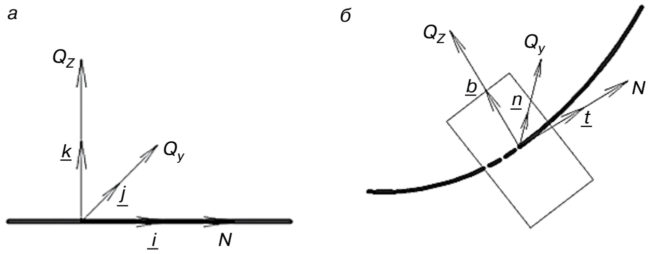

Рис. 2. *Переход к повернутым векторам [10]: а – компоненты вектора N в базисе $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$; б – компоненты вектора F в базисе $\underline{t}$, $\underline{n}$, $\underline{b}$*

$$r' = (x' \, y' \, z')^{\mathrm{T}}. \tag{5}$$

Как показано в [10], при решении задач в отсчетной конфигурации удобнее использовать повернутые векторы деформаций и усилий. Повернутые векторы – это векторы, отличающиеся от исходных тем, что они выражены в другом базисе. Так, вектор продольной и перерезывающих сил $\underline{N}$ раскладывается в базисе актуальной конфигурации как:

$$\underline{N} = N\underline{t} + Q_y\,\underline{n} + Q_z\,\underline{b}, \tag{6}$$

где N – продольная сила; Q_y, Q_z – перерезывающие силы по соответствующим направлениям.

При переходе к повернутому вектору $\underline{F}$ применяется тензор поворота $\underline{\underline{P}}$ (рис. 2) и получается повернутый вектор продольной и перерезывающих сил $\underline{F}$:

$$\underline{F} = \underline{\underline{P}}^T \cdot \underline{N} = N\underline{i} + Q_y\underline{j} + Q_z\,\underline{k}. \tag{7}$$

Как результат получаем выражение для потенциальной энергии деформации стержня W, выраженное с помощью повернутых векторов:

$$W = \frac{1}{2}\int_0^l (\underline{F} \cdot \underline{\varepsilon} + \underline{m} \cdot \underline{\Omega})\,dx, \tag{8}$$

где $\underline{\varepsilon}$ – повернутый вектор продольной и сдвиговой деформаций; $\underline{m}$ – повернутый вектор крутящего и изгибающих моментов; $\underline{\Omega}$ – повернутый вектор деформаций кручения и изгиба.

Используя повернутые векторы, записываем физический закон [7, 9] как:

$$\underline{F} = \underline{\underline{C}}_0 \cdot \underline{\varepsilon}\,, \tag{9}$$

где $\underline{\underline{C}}_0$ – тензор второго ранга жесткости стержня на растяжение-сжатие и сдвиг в отсчетной конфигурации, матричное представление которого имеет вид:

$$C_0 = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

где $C_1 = EA$ – жесткость стержня на растяжение-сжатие; C_2, C_3 – жесткости стержня на сдвиг. Конкретные выражения жесткостей C_2, C_3 не важны, так как соответствующие им компоненты сдвиговых деформаций для стержня Бернулли-Эйлера равны нулю. По аналогии записывается закон Гука для повернутых векторов $\underline{m}$ и $\underline{\Omega}$.

Определение деформаций кручения и изгиба. Квадратичная аппроксимация тензора поворота и тензора Жилина. Для записи выражения деформации кручения и изгиба воспользуемся выражением:

$$\underline{\Omega} = \underline{\underline{Z}}^{-\mathrm{T}} \cdot \underline{\varphi}', \tag{11}$$

где $\underline{\underline{Z}}$ – тензор Жилина, связывающий угловую скорость $\underline{\omega}$ и производную по времени от вектора поворота $\underline{\varphi}$ [8]:

$$\underline{\underline{Z}}^{-T} = \underline{\underline{I}} - \frac{1-\cos\varphi}{\varphi^2}\left(\underline{\varphi} \times \underline{\underline{I}}\right) + \frac{\varphi - \sin\varphi}{\varphi^3}\left(\underline{\varphi}\,\underline{\varphi} - \underline{\underline{I}}\,\varphi^2\right), \tag{12}$$

где $\varphi = \sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2}$ – модуль вектора поворота; $\underline{\underline{I}}$ – единичный тензор.

Далее тензоры Жилина и поворота раскладываются в ряд Маклорена, а затем в итоговом выражении для каждого из тензоров оставляются только линейные и квадратичные члены относительно компонент вектора поворота.

Касательная матрица жесткости конечного элемента стержня строится с использованием квадратичных слагаемых относительно компонент векторов перемещений и поворота.

Векторы деформации для теории Бернулли-Эйлера. Запишем выражение для вектора деформации $\underline{\varepsilon}$ [9, 10]:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\underline{P}}^T \cdot \underline{r}' - \underline{t}_0\,; \tag{13}$$

$$\varepsilon = (\epsilon\,\gamma_y\,\gamma_z)^{\mathrm{T}}\,, \tag{14}$$

где ϵ – продольная деформация; γ_y, γ_z – деформации сдвига по соответствующим направлениям.

Перейдя к перемещениям ($\underline{r} = \underline{r}_0 + \underline{u}$), получаем выражение для ε в форме квадратичного приближения:

$$\varepsilon_{\text{кв}} = \begin{pmatrix} \epsilon_{\text{кв}} \\ \gamma_{y\,\text{кв}} \\ \gamma_{z\,\text{кв}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\varphi_2^2}{2} - \dfrac{\varphi_3^2}{2} + u' + \varphi_3 v' - \varphi_2 w' \\ \dfrac{\varphi_1\,\varphi_2}{2} - \varphi_3 - \varphi_3 u' + v' + \varphi_1 w' \\ \varphi_2 + \dfrac{\varphi_1\,\varphi_3}{2} + \varphi_2 u' - \varphi_1 v' + w' \end{pmatrix}, \tag{15}$$

где $\underline{u} = u\underline{i} + v\underline{j} + w\underline{k}$.

Выполняем переход к теории Бернулли-Эйлера. Получаем выражение для φ_2 и φ_3, используя условия равенства нулю деформации сдвига:

$$\gamma_{y\,\text{кв}} = 0, \quad \gamma_{z\,\text{кв}} = 0; \tag{16}$$

$$\varphi_2 = 0{,}5\,\varphi_1 v' - w' + u'w'; \tag{17}$$

$$\varphi_3 = 0{,}5\,\varphi_1 w' + v' - u'v'. \tag{18}$$

Из (13) с учетом (17) и (18) получаем следующее выражение для ϵ с учетом квадратичного приближения:

$$\epsilon_{\text{кв}} = u' + 0{,}5\,w'^2 + 0{,}5\,v'^2. \tag{19}$$

Особенностью формул (17) и (18) является наличие членов $u'w'$, $-u'v'$, соответственно. Данные члены отсутствуют в работе [4], в которой построение зависимостей для стержня выполняется по теории второго порядка исходя из уравнений теории упругости.

Следует отметить, что u', v', w' в нелинейном случае не являются углами поворота относительно какой-либо оси. Все три величины являются равнозначными. Отметим также, что, удалив из (17–19) квадратичные члены, получаем выражения, известные из линейной теории стержней.

Компоненты вектора деформации кручения и изгиба:

$$\Omega = (\Omega_1\,\Omega_y\,\Omega_z)^{\mathrm{T}}, \tag{20}$$

где Ω_1 – деформация кручения; Ω_y – деформация изгиба в плоскости XZ; Ω_z – деформация изгиба в плоскости YX.

Из (11) получаем выражение для деформации кручения и изгиба с учетом квадратичного приближения для стержня Бернулли-Эйлера:

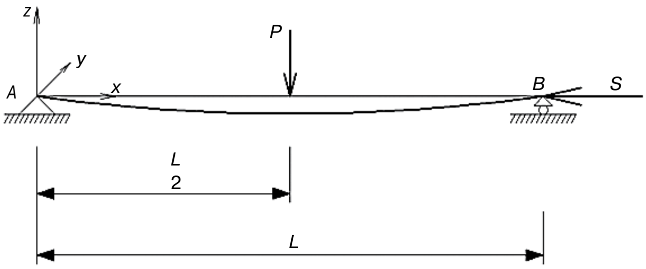

Рис. 3. *Расчетная схема задачи*

$$\Omega_{\text{кв}} = \begin{pmatrix} \varphi_1' + \dfrac{w'v''}{2} - \dfrac{v'w''}{2} \\ w'u'' + \varphi_1 v'' - w'' + u'w'' \\ -v'u'' + v'' - u'v'' + \varphi_1 w'' \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Построение касательной матрицы жесткости конечного элемента геометрически нелинейного стержня. Для построения касательной матрицы жесткости требуется вычислить вторую производную Гато [3] от энергии деформации (8), получившееся при этом подинтегральное выражение обозначим: HH 8×8. Элементы матрицы HH зависят от перемещений и поворотов текущего состояния стержня.

Введем столбец перемещений узлов конечного элемента $\underline{U}$ 14×1:

$$\underline{U}^T = (u_1, v_1, w_1, \varphi_{1\,\text{кр}}, u_1', v_1', w_1', u_2, v_2, w_2, \varphi_{2\,\text{кр}}, u_2', v_2', w_2'). \quad (22)$$

Записываем матрицу функций формы NN 8×14. Как следует из формул (17–19) и (21), функционал содержит вторые производные от всех трех перемещений u, v, w. Следовательно, для построения совместного конечного элемента необходимо использовать для этих функций кубическую аппроксимацию (полиномы Эрмита). Максимальный порядок производных функции φ_1 равен единице, поэтому для этой функции можно использовать линейные функции формы.

Для получения касательной матрицы жесткости необходимо проинтегрировать матрицу 14×14:

$$K_{\text{tang}}(U) = \int_0^l (NN^T \cdot HH \cdot NN)dx. \quad (23)$$

Приведенный алгоритм реализован авторами настоящей работы в прикладном математическом пакете Mathcad. При этом выполняется точное интегрирование по формуле (23).

Для решения систем нелинейных уравнений используется модифицированный пошаговый метод с предиктором и корректором.

Решение тестовых задач

Продольно-поперечный изгиб стержня. Закритическое поведение стержня. Расчетная схема задачи о продольно-поперечном изгибе стержня изображена на рис. 3.

Исходные данные представлены в табл. 1. Нагружение простое – пропорционально увеличиваются вертикальная и осевая силы. Для анализа закритического поведения максимальная величина осевой силы задана равной двум величинам критической силы $S_{\text{кр}}$:

$$S_{\text{кр}} = \frac{EI_y\pi^2}{L^2}. \quad (28)$$

В результате применения модифицированного пошагового метода получено хорошее совпадение численного

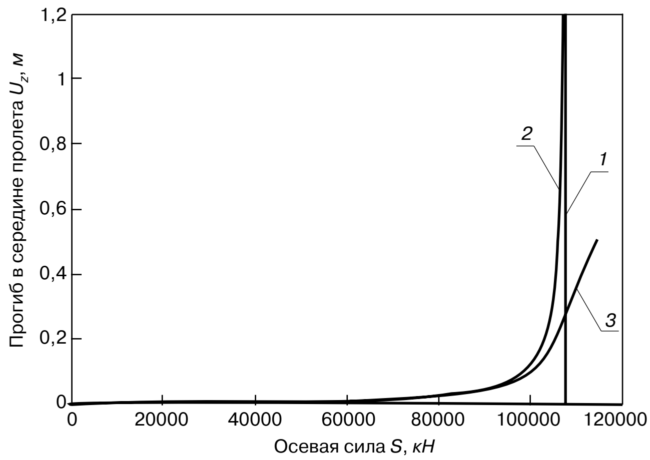

Рис. 4. *Продольно-поперечный изгиб стержня: 1 — критическая сила; 2 — аналитическое решение; 3 — численное решение*

и аналитического решений [4] до достижения критической силы (рис. 4). Поскольку построение конечного элемента стержня выполнено в геометрически нелинейной постановке без наложения ограничений на перемещения, повороты, деформации и ввиду упругости стержня, возможно проследить закритическое поведение стержня (рис. 5).

Изгиб балки с шарнирно-неподвижными опорами. Решение задачи об изгибе стержня с шарнирно-неподвижными опорами приведено в работе С.П. Тимошенко «Статические и динамические проблемы теории упругости (Киев: Наукова думка, 1975. 561 с.). Необходимо отметить, что решение этой задачи возможно только в нелинейной постановке, так как здесь прогиб стержня сопровождается продольным растяжением, а в линейной постановке изгиб не связан с растяжением.

Для данной задачи ввиду растяжения стержня критической силы нет, однако величина продольной силы заранее неизвестна, она должна находиться в процессе решения задачи. Задача решена для случая приложения сосредоточенной силы. Расчетная схема приведена на рис. 6. Размеры и сечение стержня такие же, как и в предыдущей задаче. Вертикальная сила в центре стержня составляет $P_{\text{соср}}$=100000 кН.

Таблица 1

Величина	Обозначение	Значение
Длина балки, м	L	10
Модуль упругости материала стержня, кПа	E	$2{,}1\times10^8$
Площадь поперечного сечения стержня (сечение квадратное), м^2	A	0,25
Момент инерции сечения стержня, м^4	$I_y = I_z$	0,0052
Осевая сила, кН	$S = 2S_{\text{кр}}$	215898
Вертикальная сила в центре стержня, кН	P	1000
Количество конечных элементов по длине стержня	$N_{\text{элементов}}$	40
Количество шагов	$N_{\text{шагов}}$	2000

Таблица 2

Значение на последнем шаге решения	Численное решение	Решение С.П. Тимошенко	Относительная погрешность, %
Прогиб в середине пролета, м	0,50714	0,49033	3,31
Продольное усилие N, кН	311445	306237	1,67

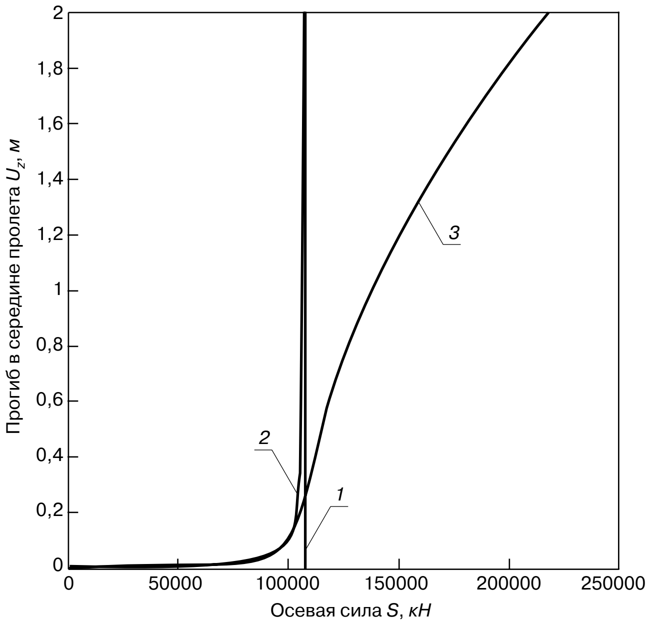

Рис. 5. *Закритическое поведение стержня при продольно-поперечном изгибе: 1 – критическая сила; 2 – аналитическое решение; 3 – численное решение*

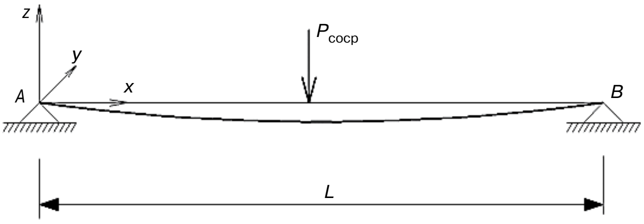

Рис. 6. *Расчетная схема задачи*

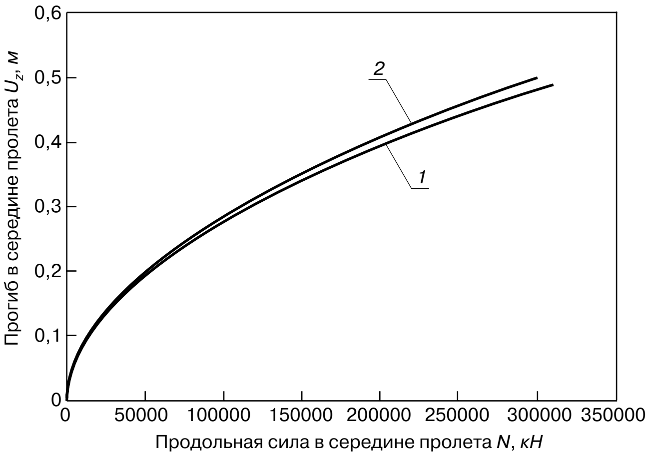

Рис. 7. *График зависимости прогиба в середине пролета от продольной силы: 1 – решение С.П. Тимошенко; 2 – численное решение*

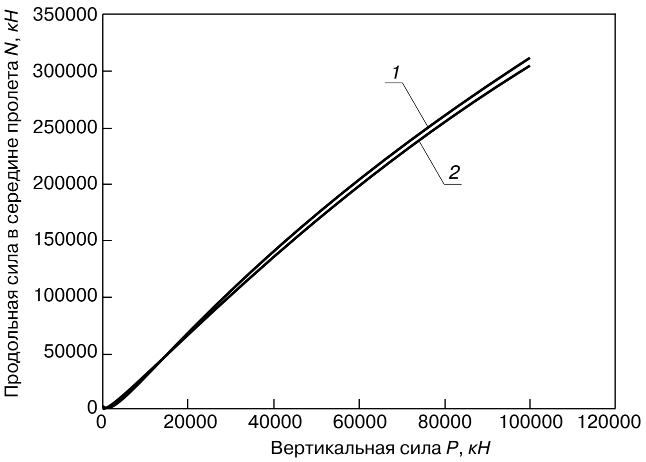

Рис. 8. *График зависимости продольной силы от вертикальной: 1 – решение С.П. Тимошенко; 2 – численное решение*

В результате применения модифицированного пошагового метода получено хорошее совпадение численного и аналитического решений (табл. 2). Результаты расчета также проиллюстрированы на рис. 7, 8.

Заключение

В настоящей работе решены следующие задачи:

– выполнено аналитическое построение касательной матрицы жесткости конечного элемента геометрически нелинейного стержня Бернулли-Эйлера, не имеющего ограничений на величины перемещений, поворотов и деформаций;
– разработан алгоритм численного построения касательной матрицы жесткости и решения системы нелинейных уравнений. Решены задачи анализа закритического поведения стержня и продольно-поперечного изгиба. Применение построенного конечного элемента позволило получить хорошее совпадение численного и аналитического решений в тестовых задачах.

Список литературы

1. *Тихонов И.Н.* Принципы расчета прочности и конструирования армирования балок перекрытий зданий из монолитного железобетона для предотвращения прогрессирующего разрушения // Жилищное строительство. 2013. № 2. С. 40–45.
2. *Ветюков Ю.М., Елисеев В.В.* Моделирование каркасов зданий как пространственных стержневых систем с геометрической и физической нелинейностью // Вычислительная механика сплошных сред. 2010. № 3. С. 32–45.
3. *Городецкий А.С., Евзеров И.Д.* Компьютерные модели конструкций. Киев: Факт, 2005. 344 с.
4. *Перельмутер А.В., Сливкер В.И.* Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы. М.: Издательство СКАД СОФТ, 2007. Т. 1. 704 с.
5. *Семенов П.Ю.* Стержневой конечный элемент для расчетов с большими перемещениями и вращениями // Проблемы нелинейной механики деформируемого твердого тела. Труды II международной конференции. Казань: НИИММ им. Н.Г. Чеботарева, 2009. С. 24–29.
6. *Wriggers P.* Nonlinear Finite Elements Methods. Berlin: Springer – Verlag Berlin Heide lberg, 2008. 559 p.
7. *Елисеев В.В.* Механика упругих стержней. СПб.: СПбГТУ, 1994. 84 с.
8. *Жилин П.А.* Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве. СПб.: СПбГТУ, 2001. 275 с.
9. *Жилин П.А.* Прикладная механика. Теория тонких упругих стержней. СПб.: Изд-во политехнич. ун-та. 2007. 100 с.
10. *Лалин В.В.* Различные формы уравнений нелинейной динамики упругих стержней // Механика материалов и прочность конструкций. Труды СПбГПУ № 489. СПб.: СПбГПУ, 2004. С. 121–128.